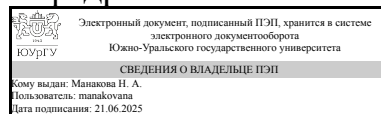


# ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:  
Заведующий выпускающей  
кафедрой



Н. А. Манакова

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины 1.Ф.М0.09.02 Введение в теорию римановых многообразий  
для направления 01.04.01 Математика

уровень Магистратура

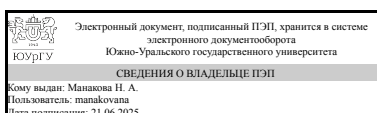
магистерская программа Неклассические уравнения математической физики

форма обучения очная

кафедра-разработчик Уравнения математической физики

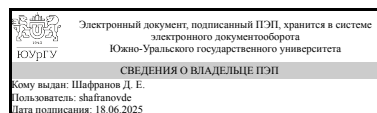
Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утверждённым приказом Минобрнауки от 10.01.2018 № 12

Зав.кафедрой разработчика,  
д.физ.-мат.н., проф.



Н. А. Манакова

Разработчик программы,  
к.физ.-мат.н., доц., доцент



Д. Е. Шафранов

## 1. Цели и задачи дисциплины

Дисциплина «Введение в теорию римановых многообразий» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с ФГОС направления 01.04.01 «Математика» в новой области математики, расположенной на стыке математического анализа, дифференциальных уравнений и современной геометрии, содействует фундаментализации образования, формированию мировоззрения и развитию системного мышления. Основная цель дисциплины научить применять методы математического и алгоритмического моделирования при изучении реальных процессов и объектов, описываемых с помощью дифференциальных форм на римановых многообразиях, для нахождения решений широкого класса прикладных задач. Основными задачами данной дисциплины являются: 1) изучение дифференцируемых римановых многообразий, дифференциальных  $k$ -форм; 2) освоение интегрирования  $k$ -форм на римановых многообразиях; 3) применение дифференциальных  $k$ -форм на римановых многообразиях к исследованию неклассических уравнений математической физики.

## Краткое содержание дисциплины

Введение в теорию римановых многообразий. Уравнения математической физики на многообразиях.

## 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

| Планируемые результаты освоения ОП ВО (компетенции)                                                                             | Планируемые результаты обучения по дисциплине                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | Знает: неевклидовы геометрии, в частности риманову геометрию на сфере, методы редукции исследуемых задач к абстрактной модели для применения системного подхода и вырабатывания стратегии решения проблемы<br>Умеет: проверять свойства гладкости, компактности, ориентируемости, наличия края у заданных многообразий<br>Имеет практический опыт: классификации поверхностей и многообразий для анализа проблемных ситуаций |

## 3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

| Перечень предшествующих дисциплин, видов работ учебного плана | Перечень последующих дисциплин, видов работ |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Нет                                                           | Не предусмотрены                            |

Требования к «входным» знаниям, умениям, навыкам студента, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин:

Нет

#### 4. Объём и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 ч., 54,25 ч.  
контактной работы

| Вид учебной работы                                                                           | Всего часов | Распределение по семестрам в часах |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|------------------------------------|
|                                                                                              |             | Номер семестра                     |
|                                                                                              |             | 4                                  |
| Общая трудоёмкость дисциплины                                                                | 108         | 108                                |
| Аудиторные занятия:                                                                          | 48          | 48                                 |
| Лекции (Л)                                                                                   | 0           | 0                                  |
| Практические занятия, семинары и (или) другие виды аудиторных занятий (ПЗ)                   | 48          | 48                                 |
| Лабораторные работы (ЛР)                                                                     | 0           | 0                                  |
| Самостоятельная работа (СРС)                                                                 | 53,75       | 53,75                              |
| Подготовка к выполнению теоретической контрольной работы                                     | 12          | 12                                 |
| Подготовка к зачету                                                                          | 12          | 12                                 |
| Подготовка студента по теме своего доклада                                                   | 16          | 16                                 |
| Подготовка к практической контрольной работе "Гладкие многообразия и дифференциальные формы" | 13,75       | 13.75                              |
| Консультации и промежуточная аттестация                                                      | 6,25        | 6,25                               |
| Вид контроля (зачет, диф.зачет, экзамен)                                                     | -           | зачет                              |

#### 5. Содержание дисциплины

| № раздела | Наименование разделов дисциплины                  | Объем аудиторных занятий по видам в часах |   |    |    |
|-----------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------|---|----|----|
|           |                                                   | Всего                                     | Л | ПЗ | ЛР |
| 1         | Введение в теорию римановых многообразий.         | 30                                        | 0 | 30 | 0  |
| 2         | Уравнения математической физики на многообразиях. | 18                                        | 0 | 18 | 0  |

##### 5.1. Лекции

Не предусмотрены

##### 5.2. Практические занятия, семинары

| № занятия | № раздела | Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара                        | Кол-во часов |
|-----------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1         | 1         | Карты и атлас на множестве.                                                                | 2            |
| 2-3       | 1         | Отделимость. Определение многообразия.                                                     | 4            |
| 4-5       | 1         | Функции на многообразии. Примеры                                                           | 4            |
| 6-7       | 1         | Векторные расслоения на многообразии. Гладкие пути и касательные векторы                   | 4            |
| 8-9       | 1         | Векторные поля на многообразии. Римановы многообразия в современных математических моделях | 4            |

|       |   |                                                                                       |   |
|-------|---|---------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 10    | 1 | Дифференциальные формы на многообразии. Операции с дифференциальными формами          | 2 |
| 11    | 1 | Оператор Лапласа-Бельтрами                                                            | 2 |
| 12    | 1 | Выступление студентов с докладами на выбранную тему                                   | 2 |
| 13-14 | 1 | Теорема Ходжа о разложении.                                                           | 4 |
| 15    | 1 | Контрольная работа ПК "Гладкие многообразия и дифференциальные формы"                 | 2 |
| 16-17 | 2 | Интегрирование на римановых многообразиях                                             | 4 |
| 18-19 | 2 | Многообразия с краем.                                                                 | 4 |
| 20-21 | 2 | Спектр оператора Лапласа-Бельтрами                                                    | 4 |
| 22    | 2 | Уравнения математической физики в пространстве k-форм.                                | 2 |
| 23    | 2 | Теоретическая контрольная работа. Выступление студентов с докладами на выбранную тему | 2 |
| 24    | 2 | Выступление студентов с докладами на выбранную тему                                   | 2 |

### 5.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

### 5.4. Самостоятельная работа студента

| Выполнение СРС                                                                               |                                                                                                                                                                             |         |              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|--------------|
| Подвид СРС                                                                                   | Список литературы (с указанием разделов, глав, страниц) / ссылка на ресурс                                                                                                  | Семестр | Кол-во часов |
| Подготовка к выполнению теоретической контрольной работы                                     | ЭУМД 1 основная (Все главы); ПУМД 1 основная (Все главы); ПУМД 3 дополнительная (Глава 6 и упражнения к Главе 6)                                                            | 4       | 12           |
| Подготовка к зачету                                                                          | ЭУМД 1 основная (Все главы); ПУМД 1 основная (Все главы); ПУМД 3 дополнительная (Все главы и упражнения после глав)                                                         | 4       | 12           |
| Подготовка студента по теме своего доклада                                                   | ЭУМД 1 основная (Все главы); ПУМД 1 основная (Все главы); ПУМД 2 основная (Главы 2, 3 и 4); ПУМД 3 дополнительная (Все разделы); Методические рекомендации студентам по СРС | 4       | 16           |
| Подготовка к практической контрольной работе "Гладкие многообразия и дифференциальные формы" | ЭУМД 2 дополнительная (Все главы); ПУМД 1 дополнительная (Глава 11); ПУМД 3 дополнительная (Главы 1 и 2 и упражнения после глав)                                            | 4       | 13,75        |

## 6. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации

Контроль качества освоения образовательной программы осуществляется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе оценивания результатов учебной деятельности обучающихся.

### 6.1. Контрольные мероприятия (КМ)

| № КМ | Се-местр | Вид контроля             | Название контрольного мероприятия                                       | Вес | Макс. балл | Порядок начисления баллов                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Учитывается в ПА |
|------|----------|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 1    | 4        | Текущий контроль         | Доклад по дисциплине (Д)                                                | 40  | 5          | При оценке используется следующая шкала:<br>подготовлен доклад - 1 балл;<br>подготовлена презентация - 1 балл;<br>оформление презентации соответствует ГОСТ- 1 балл;<br>тема доклада раскрыта полностью - 1 балл;<br>доклад вызвал интерес у аудитории - 1 балл.                                                                                                                                                                                                                                                   | зачет            |
| 2    | 4        | Текущий контроль         | Контрольная работа "Гладкие многообразия и дифференциальные формы" (ПК) | 20  | 10         | Две задачи в контрольной работе. Каждая задача оценивается в соответствии со следующей шкалой:<br>0 баллов отсутствует решение в работе;<br>1 балл выписаны правильные формулы, но решение отсутствует;<br>2 балла выписаны правильные формулы и проведены правильные расчеты, но общее решение не получено;<br>3 балла получено общее решение, но пропущены частные решения;<br>4 балла получены все решения, но имеются недочеты или лишние решения;<br>5 баллов задача решена полностью и без ошибок.           | зачет            |
| 3    | 4        | Текущий контроль         | Теоретическая контрольная работа (ТК)                                   | 20  | 4          | Контрольная точка ТК проводится на практическом занятии. Продолжительность – 45 минут. Студенту предлагается ответить на 2 вопроса. Максимальная оценка за вопрос составляет 2 балла. При оценке используется следующая шкала: 2 балла – приведен полный ответ на вопрос, все использованные формулы верны, записаны все требуемые свойства; 1 балл – в ответе содержатся 2–3 ошибки или ответ неполный, но при этом изложено не менее 60% полного ответа; 0 баллов – изложено менее 60% верного ответа на вопрос. | зачет            |
| 4    | 4        | Текущий контроль         | Активная познавательная деятельность (АПД)                              | 20  | 20         | По 1 баллу на каждом из 20 практических занятиях (за выход к доске, за заданные докладчику вопросы)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | зачет            |
| 5    | 4        | Промежуточная аттестация | Зачетная работа (ПА)                                                    | -   | 4          | Контрольное мероприятие промежуточной аттестации проводится в виде решения варианта зачетной                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | зачет            |

|  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
|--|--|--|--|--|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  |  |  |  |  |  | <p>работы.</p> <p>В зачетной работе один теоретический вопрос и одна задача.</p> <p>Правильный ответ на теоретический вопрос – 2 балла;</p> <p>ответ на вопрос содержит значительные ошибки – 1 балл;</p> <p>неправильный ответ или отсутствие ответа – 0 баллов.</p> <p>Правильно решена задача - 2 балла;</p> <p>задача решена частично и выписаны правильные формулы - 1 балл;</p> <p>задача не решена - 0 баллов.</p> |  |
|--|--|--|--|--|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

## 6.2. Процедура проведения, критерии оценивания

| Вид промежуточной аттестации | Процедура проведения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Критерии оценивания                     |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| зачет                        | На зачете происходит оценивание учебной деятельности обучающихся по дисциплине на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. Студент может улучшить свой рейтинг, пройдя контрольное мероприятие промежуточной аттестации, которое не является обязательным. Зачетная работа проводится в письменной форме. Студенту дается 1 академический час на написание работы. | В соответствии с пп. 2.5, 2.6 Положения |

## 6.3. Паспорт фонда оценочных средств

| Компетенции | Результаты обучения                                                                                                                                                                                    | № КМ |   |   |   |   |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|---|---|---|---|
|             |                                                                                                                                                                                                        | 1    | 2 | 3 | 4 | 5 |
| УК-1        | Знает: неевклидовы геометрии, в частности риманову геометрию на сфере, методы редукции исследуемых задач к абстрактной модели для применения системного подхода и выработки стратегии решения проблемы | +    | + | + | + | + |
| УК-1        | Умеет: проверять свойства гладкости, компактности, ориентируемости, наличия края у заданных многообразий                                                                                               | +    | + | + | + | + |
| УК-1        | Имеет практический опыт: классификации поверхностей и многообразий для анализа проблемных ситуаций                                                                                                     |      |   | + |   | + |

Типовые контрольные задания по каждому мероприятию находятся в приложениях.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Печатная учебно-методическая документация

#### а) основная литература:

1. Спивак, М. Математический анализ на многообразиях Учеб. пособие М. Спивак. - 2-е изд. - СПб. и др.: Лань, 2005. - 158, [1] с. ил.
2. Загребина С. А. Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа : монография / С. А. Загребина, М. А. Сагадеева ; Юж.-Урал. гос. ун-т, Фак. математики, механики

и компьютер. наук ; ЮУрГУ. - Челябинск : Издательский Центр ЮУрГУ, 2016.  
- 121 с.

*б) дополнительная литература:*

1. Дубровин, Б. А. Современная геометрия: Методы и прил. Учеб. пособие для физ.-мат. спец. ун-тов. - 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1986. - 759 с. ил.
2. Канатников, А. Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных [Текст] учеб. для втузов А. Н. Канатников, А. П. Крищенко, В. Н. Четвериков ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. - 3-е изд., испр. - М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. - 455 с. ил.
3. Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли Пер. с англ. Ф. Ф. Воронова, А. В. Хохлова; Под ред. А. А. Кириллова. - М.: Мир, 1987. - 302 с. ил.

*в) отечественные и зарубежные журналы по дисциплине, имеющиеся в библиотеке:*

1. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия математическое моделирование и программирование

*г) методические указания для студентов по освоению дисциплины:*

1. Методические рекомендации студентам по СРС

*из них: учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента:*

1. Методические рекомендации студентам по СРС

**Электронная учебно-методическая документация**

| № | Вид литературы            | Наименование ресурса в электронной форме | Библиографическое описание                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---|---------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Основная литература       | ЭБС издательства Лань                    | Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию : учебное пособие / В. И. Паньженский. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 240 с. <a href="https://e.lanbook.com/book/212126">https://e.lanbook.com/book/212126</a>                                  |
| 2 | Дополнительная литература | ЭБС издательства Лань                    | Монахов, В.Н. Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. [Электронный ресурс] / В.Н. Монахов, Е.В. Семенко. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2003. — 416 с. <a href="http://e.lanbook.com/book/59265">http://e.lanbook.com/book/59265</a> |

**Перечень используемого программного обеспечения:**

1. Microsoft-Windows(бессрочно)
2. Microsoft-Office(бессрочно)

**Перечень используемых профессиональных баз данных и информационных справочных систем:**

Нет

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

| Вид занятий                     | № ауд. | Основное оборудование, стенды, макеты, компьютерная техника, предустановленное программное обеспечение, используемое для различных видов занятий                                       |
|---------------------------------|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Практические занятия и семинары | 712(1) | Доска, мел. В случае дистанционных занятий компьютер с доступом в Интернет, с предустановленными Microsoft-Windows(бессрочно) и Microsoft-Office(бессрочно), микрофоном и веб-камерой. |